جامعة البعث
كلية العلوم



قسم الرياضيات
السنة الثانية

العام الدراسي : 2017 / 2018

تحليل (٣)

المحاضرة النظرية الأولى

(١)

إعدَاد :

داني محفوض – وهب الحسن

Facebook: Dani Mahfoud
Facebook: Wahab Al-Hasan

تُطلب من مكتبة ميار الهندسية
حمص – نفق جامعة البعث

أرضي: ٠٣١٢١١٨١١٩
جوال: ٠٩٤٤٨٠٨٢٤٩

تمهيد عام لمادة التحليل (3) :

في منهج السنة الأولى من قسم الرياضيات وضع مقرري التحليل (1) و التحليل (2) ليتمكن الرياضي المبتدئ من اكتساب الخبرة الكافية في مبادئ التحليل الرياضي بشقيه الرئيسيين التفاضل و التكامل . و لو أردنا أن نكون خصوصيين الحديث عن مقرر التحليل (1) --- إن أول ما سنذكره هو الحيز الكبير من هذا المقرر ، هذا الحيز مخصص لدراسة موضوع المتتاليات و السلاسل و الجداءات اللانهائية . حيث درسنا مفهوم المتتالية و السلسلة و الجداء اللانهائي و مفهوم تقارب و تباعد كل من هذه المفاهيم الثلاثة ، و درسنا بعض اختبارات التقارب --- و الآن -----

في السنة الثانية --- سوف ندرس مقرر التحليل (3) لنكمل مسيرتنا في موضوعات التحليل الرياضي ، و بشكل خاص --- سوف نركز دراستنا على الموضوعات الثلاث الـ ذكرناها أعلاه ---

المتتاليات و السلاسل و الجداءات ---

حيث سنعيد دراستها بدءاً من المفاهيم الأولية وصولاً إلى مفاهيم أكثر عمقاً و تطوراً ←

وَ تَطَوُّرًا" مِنْ تِلْكَ التِي تَنَاوَلْنَاهَا فِي التَّحْلِيلِ (١) ---

* سَوْفَ نَذْكُر فِيمَا يَلِي المَحَاوِرَ الشَّخْصِيَّةَ التِي تَقُومُ عَلَيْهَا مَادَّةُ التَّحْلِيلِ (٢) --- «العَنَاوِينُ الرَّئِيسِيَّةُ»

المُتَتَالِيَاتُ العَدَدِيَّةُ

السَّلَاسِلُ العَدَدِيَّةُ

الجُدَاءَاتُ اللَّانِهَائِيَّةُ

مُتَتَالِيَاتُ الدَّوَالِ

سَلَاسِلُ تَابِعِيَّةٌ وَ جُدَاءَاتٌ تَابِعِيَّةٌ

سَلَاسِلُ القُوَى

نَشْرُ تَايْلُور وَ مَاكْلُورَان

سَلَاسِلُ فُورِيِيه

تَكَامُلَاتُ أُولَر

نَخْتِمُ هَذِهِ الفِقْرَةَ التَّمْهِيدِيَّةَ بِأَنَّ هَذِهِ الكَائِنَاتِ الرِّيَاضِيَّةَ الثَّلَاثَ التِي سَتَتَمَحْوَرُ دِرَاسَتُنَا حَوْلَهَا (المُتَتَالِيَةُ - السِّلْسِلَةُ - الجُدَاءُ اللَّانِهَائِي) تَدْخُلُ وَ لَهَا تَطْبِيقَاتٌ فِي مَيَادِينَ بَحْثِيَّةٍ كَثِيرَةٍ ، كَالتَّحْلِيلِ العَدَدِي وَ التَّحْلِيلِ العُقَدِي وَ نَظَرِيَّةِ الإِحْتِمَالَاتِ وَ غَيْرِهَا --- إِضَافَةً لِدَوْرِهَا الفَعَّالِ فِي دِرَاسَةِ الكَثِيرِ مِنْ مِنَ الظَّوَاهِرِ وَ الدِّرَاسَاتِ العِلْمِيَّةِ المُخْتَلِفَةِ ---

---

نَبْدَأُ بِدِرَاسَةِ المُحَاضَرَةِ الأُولَى ←

أولاً : مفهوم المتتالية :

ليكن لدينا المجموعة الغير خالية A ، و مجموعة الأعداد الطبيعية N ، نسمي كل دالة (تابع - تطبيق) منطلقها المجموعة N ومستقرها المجموعة A بمتتالية.

أي ... كل دالة من الشكل $f: N \longrightarrow A$

$n \longrightarrow f(n) = a_n$ نسميها متتالية .

و نسمي a_1 و a_2 و a_3 و ـــ وصولاً إلى a_n بحدود المتتالية ، و الحد a_n ذو الترتيب n نسميه الحد العام للمتتالية .

ماهي طبيعة المجموعة A ؟

★ إذا كانت المجموعة A هي مجموعة أعداد حقيقية (أي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$) عندها ستكون حدود المتتالية هي أعداد حقيقية ونقول بهذه الحالة إن المتتالية هي متتالية عددية حقيقية .

★ إذا كانت المجموعة A هي مجموعة أعداد عقدية (أي مجموعة جزئية من C) عندها ستكون حدود المتتالية هي أعداد عقدية ونقول بهذه الحالة إن المتتالية هي متتالية عددية عقدية .

ـ ولن نتطرق إلى دراسة هذه الحالة في التحليل (3)

★ إذا كانت المجموعة A هي مجموعة جزئية من مجموعة دوال حقيقية ما فنقول هنا إن المتتالية هي متتالية دوال حقيقية ، ولاحقاً سنرى أن جزءاً كبيراً

كبيرٌ في دراستنا من التحليل(3) سيكون من هذه الحالة:
متتالية الدوال الحقيقية

كيف نرمز للمتتالية؟ هناك ترميزات مختلفة للمتتالية.
أشهرها: (a_n) - $(a_n)_{n\in N}$ - $\{x_n\}$ - $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

ومن كتاباتنا سنعتمد أسهل هذه الرموز كتابة: (a_n).

ملاحظة مفهوم المتتالية: $X: N \to R$
نسمي أي تطبيق منطلقه مجموعة الأعداد الطبيعية N^* ومستقره مجموعة من الأعداد الحقيقية بمتتالية عددية حقيقية. فلو رمزنا بـ x_n لصورة العدد $n\in N$، أي $X(n)=x_n$، وفق التطبيق السابق سوف نتحصل لدينا مجموعة الأعداد $\{x_1, x_2, x_3, ---\}$ التي نسميها حدود المتتالية.

وإن الطريقة الأساسية لإعطاء المتتالية أو التعبير عن المتتالية لا تتمثل بكتابة حدود المتتالية، إنما بإعطاء الحد العام للمتتالية، أي بكتابة عبارة x_n.

سندرس بعض الأمثلة عن المتتالية:

مثال (1): المتتالية التي حدها العام $x_n = \frac{n+1}{n^2}$ هي:

$$(x_n) = \left\{2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, ---, \frac{n+1}{n^2}\right\}$$

مثال (2): المتتالية التي حدها العام $x_n = \frac{1}{n}$ هي:

$$(x_n) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ---, \frac{1}{n}\right\}$$

مثال (٤): المتتالية التي حدها العام $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$

هي: $(x_n) = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, ---, \frac{(-1)^n}{n}\right\}$

ثانياً: مفهوم المتتالية العددية المحدودة:

نقول عن المتتالية العددية أنها متتالية عددية محدودة إذا كانت هذه المتتالية محدودة من الأعلى و محدودة من الأسفل (من الأدنى).

* متى تكون المتتالية محدودة من الأعلى؟

تكون المتتالية العددية (a_n) محدودة من الأعلى إذا:

- إذا كان هناك عدد حقيقي $c < \infty$ و عدد طبيعي N بحيث ما يلي يكون محققاً:

$$a_n \leq c \quad ; \quad \forall n > N$$

تكون المتتالية محدودة من الأعلى، و في هذه الحالة نسمي العدد c حد أعلى للمتتالية.

* متى تكون المتتالية محدودة من الأدنى؟

تكون المتتالية العددية محدودة من الأدنى إذا:

- إذا كان هناك عدد حقيقي $c > -\infty$ و عدد طبيعي N بحيث ما يلي يكون محققاً: ←

$a_n \geq c \quad ; \quad \forall \ n > N$

عندها ستكون المتتالية محدودة من الأدنى ، و في هذه الحالة نسمي العدد c حد أدنى للمتتالية .

و الآن ... نقول عن المتتالية (a_n) أنها محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى و محدودة من الأدنى .

أي إذا وجد عدد حقيقي موجب $c > 0$ و عدد طبيعي N بحيث ما يلي يكون محققاً :

$$|a_n| \leq c \quad ; \quad \forall n > N$$

أي : $-c \leq a_n \leq c$

أي سيكون : $a_n \in [-M , +M]$

سندرس بعض الأمثلة عن المتتالية المحدودة :

مثال(1) : لو أخذنا المتتالية $(a_n) = (-1)^n$

واضح أن هذه المتتالية محدودة و ذلك لأن :

$$|a_n| \leq |(-1)^n| = 1$$

و إذا كانت أصغر من الواحد ستكون ناقص واحد .

بمعنى : $a_n \in \{-1 , +1\}$

أي a_n تنتمي للمجموعة المكونة من عنصرين فقط هما (-1) و $(+1)$.

★ نجد هنا أن أي عدد أكبر أو يساوي الواحد $c \geq 1$ يصلح لإثبات محدودية المتتالية .

Scanned by CamScanner

مِثال (2) : لو أخذنا المتتالية $(a_n) = \frac{1-3n}{n}$

سنلاحظ أنَّ هذه المتتالية هي متتالية محدودة .

لأنّ : $|a_n| = \left|\frac{1-3n}{n}\right| = \left|\frac{1}{n} - 3\right| = \left|3 - \frac{1}{n}\right|$

ونلاحظ أنّ :

$\forall n \in N$ و $\left|3 - \frac{1}{n}\right| < 3$.

إذاً : $|a_n| < 3$

ونلاحظ أنّ أي عدد $c \geq 3$ يصلح لإثبات محدودية المتتالية .

مِثال - 3 - : لاحظ أنّ المتتالية العددية الحسابية :

$(a_n) = a + (n-1) \cdot d$

حيث a و d حقيقيّان و $d \neq 0$.

هذه متتالية غير محدودة لأنّه لا يمكن إيجاد عدد حقيقي c وعدد طبيعي N بحيث يكون $|a_n| \leq c$ من أجل كل $n \geq N$.

تذكرة بالمتتالية الهندسية والحسابية :

- المتتالية الحسابية : هي مجموعة من الأعداد مرتبة على الشكل التالي : $a, a+1 \cdot r, a+2r, a+3r, \ldots$

حيث a هو الحد الأول و r نسميه أساس المتتالية .

أي : في المتتالية الحسابية ينتج كل حد من الحد الذي يسبقه بإضافة الأساس ، فمثلاً : $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

هذه متتالية حسابية أساسها $r = 2$ و $a = 1$

- قوانين خاصة بالمتتاليات الحسابية :

* الحد العام الذي رتبته n يعطى بالعلاقة :

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

* مجموع أول n حد من المتتالية الحسابية يعطى بالعلاقة :

$S = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

* أساس المتتالية الحسابية يعطى بالعلاقة :

$r = a_n - a_{n-1}$

- المتتالية الهندسية : هي مجموعة من الأعداد مرتبة على الشكل التالي : $a, a \cdot r, a \cdot r^2, a \cdot r^3, \ldots$

حيث a الحد الأول و r تسمى أساس المتتالية.

أي : في المتتالية الهندسية ينتج كل حد عن الذي يسبقه بضربه بالأساس r.

مثلاً : 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , 64 , 128 , ...

هذه متتالية هندسية أساسها $r = 2$ و $a = 1$

- قوانين خاصة بالمتتالية الهندسية :

* الحد العام الذي رتبته n يعطى بالعلاقة : $a_n = a \cdot r^{n-1}$

* مجموع أول n حد من المتتالية يعطى بالعلاقة :

$S = a \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$

* أساس المتتالية الهندسية يعطى بالعلاقة : $r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$

ثالثاً : مفهوم المتتالية العددية المضطردة

ليكن لدينا (a_n) متتالية عددية ، عندئذٍ يقال عن المتتالية (a_n) أنها :

1- متتالية متزايدة إذا تحقق الشرط : « متزايدة تماماً »

$$a_n < a_{n+1} \quad ; \quad \forall n \in N$$

2- متتالية غير متناقصة إذا تحقق :

$$a_n \leq a_{n+1} \quad ; \quad \forall n \in N$$

3- متتالية متناقصة إذا تحقق : « متناقصة تماماً »

$$a_n > a_{n+1} \quad ; \quad \forall n \in N$$

4- متتالية غير متزايدة إذا تحقق :

$$a_n \geq a_{n+1} \quad ; \quad \forall n \in N$$

و الآن إذا كانت المتتالية تأخذ إحدى الحالات السابقة 1 أو 2 أو 3 أو 4 نقول أنها متتالية مضطردة .

* المتتالية (المتزايدة تماماً) : يكون فيها كل حد أكبر من الحد الذي يسبقه . (أكبر تماماً) .

* المتتالية (الغير متناقصة) :

تكون متزايدة و لكن ليست تماماً ، أي أنه سيكون بعض الحدود فيها متساوية (أي ، مثلاً : $a_k = a_{k+1}$) .

* المتتالية المتناقصة) : يكون فيها كل حد أصغر من الذي يسبقه . (أصغر تماماً) .

* المتتالية (الغير متزايدة) :

تكون متناقصة ولكن ليس تماماً ، أي أنه يكون بعض الحدود حالة مساواة (أي مثلاً : $a_k = a_{k+1}$)

تمثيل هندسي و مخطط لحالات اضطراد المتتالية

توضيح :

a_{13} a_{14} a_6 a_7 a_7 a_6 a_{13} a_{12}

نلاحظ هنا أنّ المتتالية متزايدة تماماً ، أي : تستمر في تزايدها ولا تقف أبداً عند حدين متساويين أي : لا يوجد فيها أي حدين متساويين .

ونلاحظ هنا أنّ المتتالية تبقى متزايدة حتى تصل إلى الحد a_6 الذي تساوي قيمته مع الحد a_7 . ثم تعود لتزايدها إلى الحد a_{13} فيقف تزايدها بسبب تساوي الحد a_{13} مع الحد a_{14} . ونقول عن هذه الحالة أنها حالة التزايد غير التام ، أو نسميها متتالية غير متناقصة! أي تخلو تماماً من التناقص .

نلاحظ هنا أنّ المتتالية متناقصة تماماً ، أي : أنها تستمر في تناقصها ولا تقف عند حدين متساويين . أي : لا يوجد فيها أي حدين متساويين .

نلاحظ هنا أنّ المتتالية تبقى متناقصة حتى تصل إلى الحد a_6 الذي تساوي قيمته مع قيمة الحد a_7 . ثم تعود لتناقصها و تقف من جديد عند الحد a_{12} لكونه يساوي الحد a_{13} . نقول عن هذه الحالة أنها حالة التزايد غير التام ، أو نسميها متتالية غير متزايدة! أي تخلو تماماً من حالة التزايد .

رَابِعاً : مَفْهُومُ المُتَتَالِيَةِ العَدَدِيَّةِ المُتَقَارِبَةِ :

لِتَكُنْ لَدَيْنَا مُتَتَالِيَةٌ عَدَدِيَّةٌ (a_n) ، عِنْدَئِذٍ نَقُولُ أَنَّ هَذِهِ المُتَتَالِيَةَ مُتَقَارِبَةٌ مِنْ قِيمَةٍ عَدَدِيَّةٍ مَا ...... $a \in \mathbb{R}$ إِذَا وَفَقَط إِذَا كَانَ مِنْ أَجْلِ كُلِّ عَدَدٍ حَقِيقِيٍّ $\varepsilon > 0$ يُوجَدُ عَدَدٌ طَبِيعِيٌّ يَتَعَلَّقُ بِهِ $N(\varepsilon)$ ، بِحَيْثُ مِنْ أَجْلِ كُلِّ قِيَمِ n الأَكْبَرِ مِنْ $N(\varepsilon)$ يَكُونُ لَدَيْنَا الفَرْقُ بِالقِيمَةِ المُطْلَقَةِ بَيْنَ a وَ الحَدِّ الَّذِي تَرْتِيبُهُ n (أَيِ الحَدِّ a_n) سَيَكُونُ أَصْغَرَ تَمَاماً مِنَ العَدَدِ ε .

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N(\varepsilon) \ ; \ \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon}$$

وَبِنَاءً عَلَى خَوَاصِّ القِيمَةِ المُطْلَقَةِ سَيَكُونُ ......

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$$

وَبِإِضَافَةِ العَدَدِ a سَيَكُونُ : ......

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

وَذَلِكَ يَعْنِي : ...... $a_n \in]a - \varepsilon , a + \varepsilon[$

مِمَّا سَبَقَ يُمْكِنُ لَنَا أَنْ نَفْهَمَ أَنَّهُ فِي المُتَتَالِيَةِ العَدَدِيَّةِ المُتَقَارِبَةِ مِنْ a ، نُلَاحِظُ أَنَّهُ اعْتِبَاراً مِنْ قِيمَةٍ مَا $N(\varepsilon)$ وَصَاعِداً يَكُونُ البُعْدُ بَيْنَ نُقْطَةِ النِّهَايَةِ (a) وَ أَيِّ حَدٍّ مِنْ حُدُودِ المُتَتَالِيَةِ أَصْغَرَ تَمَاماً مِنْ ε .

فَلَوْ أَخَذْنَا مَثَلاً المُتَتَالِيَةَ (a) المُتَزَايِدَةَ وَ المُتَقَارِبَةَ مِنَ العَدَدِ a ، عِنْدَئِذٍ الرَّسْمُ التَّالِي سَيُوَضِّحُ لَنَا أَكْثَرَ مَعْنَى وَكَيْفِيَّةَ تَقَارُبِ المُتَتَالِيَةِ (a_n) مِنْ a . ←

$a_1 \quad a_2 \text{ ---- } a_{N(\varepsilon)} \text{ ----- } a_n \text{ ---- } a$

$< \varepsilon \quad ; \quad n > N(\varepsilon)$

وذلك يعني أن أي فترة مركزها a ونصف قطرها ε تحوي جميع حدود المتتاليات باستثناء عدد منها (أي عدد منتهٍ من حدود هذه المتتاليات)

ملاحظة: أثناء دراسة التقارب لتعيين العدد N (أي $N(\varepsilon)$) نفرض وجوده من أجل أي $\varepsilon > 0$ معطاة وعندئذٍ يكون ما يلي محققاً: $|a_n - a| < \varepsilon \quad ; \quad \forall n > N$

ثم نسعى لتعيين هذا العدد (أي N).

سندرس بعض الأمثلة:

مثال (1): المتتاليات ذات الحد العام $a_n = \frac{1}{n^2}$ هي متتاليات متقاربة من الصفر. لنثبت صحة ذلك:

من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ ، لنعين العدد $N(\varepsilon)$

بحيث يكون: $\forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$

$* \quad \left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Rightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$

قلبنا طرفي المتراجحة ← فتتغير إشارة التراجح.

إذاً: $n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$ وبجذر الطرفين يكون:

$$n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

ولو أخذنا $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$ سيكون:

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon \quad ; \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

وبالتالي يكون قد تحقق المطلوب إثباته.

ملاحظة: عندما كتبنا $N(\varepsilon)=\left\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil$ ، إن ما نقصده

بـ $\left\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil$ هو أننا نختار الجزء الصحيح من الناتج.

مثلاً:

$$\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = \lceil 2.5 \rceil = 2$$

ملاحظة: عندما تكون المتتالية (a_n) متقاربة من العدد a نكتب:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

مثال (2): برهن أن المتتالية العددية $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ تقبل النهاية 1 عندما $n \to \infty$.

الحل: نفرض $\varepsilon > 0$ ولنبرهن على وجود عدد $N(\varepsilon)$ بحيث يكون من أجل أي $n > N(\varepsilon)$ تكون المتراجحة التالية محققة:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \boxed{n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} \qquad \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} = N(\varepsilon)$$

فلو اعتبرنا $\varepsilon = 10^{-2}$ سيكون:

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{10^{-2}} - 1 = 100 - 1 = 99$$

إذاً: من أجل أي $n > 99$ سيكون $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$

وتكون المتتالية متقاربة وسيكون: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

ملاحظات وخواص هامة :

1) ملاحظة بخصوص المتتاليات المتزايدة تماماً :

عندما نقرأ مفهوم المتتاليات المتزايدة ومفهوم المتتاليات المحدودة إن أول ما يتبادر إلى أذهاننا هو أن المتتاليات المتزايدة قد تكون غير محدودة من الأعلى. (أو المتتاليات المتناقصة قد تكون غير محدودة من الأدنى) . حقيقة إن ذلك غير صحيح في الحالة العامة ، و كأبسط مثال على ذلك المتتاليات الهندسية $(a \cdot q^{n-1})$ عندما تكون q محصورة بين الصفر و الواحد و a عدد موجب عندها ستكون في هذه الحالة متزايدة تماماً و محدودة من الأعلى .

---

2 - عندما تكون المتتاليات العددية متقاربة عندها سيكون لها نهاية وحيدة .

---

3 - إن كل متتالية متقاربة هي متتالية محدودة .
و لكن في الحالة العامة ليست كل متتالية محدودة تكون بالضرورة متتالية متقاربة .
متى تكون المتتاليات المحدودة متقاربة ؟
تكون المتتاليات العددية المحدودة متقاربة إذا كانت مطردة .

* إذا كانت المتتاليات متزايدة و محدودة من الأعلى عندها تكون متقاربة .

* إذا كانت المتتاليات متناقصة و محدودة من الأسفل ـ

الأسفل تكون متقاربة .

* إذا كانت المتتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإن لها نهاية محددة وتكون: $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n ; n \in N\}$

حيث $a_n \le a$ & $\forall \tilde{a} < a , \exists a_n > \tilde{a}$

مثال :

لتكن المتتالية : $-1 , -\frac{1}{2} , -\frac{1}{3} , -\frac{1}{4} , \ldots\ldots$

فإن : $a = \sup\{a_n\} = 0$

و $\tilde{a} = -\frac{1}{100}$

$\Leftarrow$ $a_n = -\frac{1}{1000} > \tilde{a}$

خامساً : مفهوم متتالية كوشي :

نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ أنها متتالية كوشي إذا حققت الشرط التالي :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) ; \forall m, n \in N , m > n > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$$

قراءة الشرط :

أياً كان العدد الموجب ε فيوجد عدد N مرتبط بالعدد ε (أي العدد $N(\varepsilon)$) ، بحيث أياً كان العددين الطبيعيين m و n وكان m أكبر من n و n أكبر من $N(\varepsilon)$ فإنه سيكون : الفرق بالقيمة المطلقة بين الحد الذي ترتيبه m و الحد الذي ترتيبه n من حدود المتتالية سيكون أصغر من العدد الموجب ε .

خاصية (1) : كل متتالية كوشي من مجموعة الأعداد الحقيقية هي متتالية محدودة .

خاصية (2) : كل متتالية كوشي من مجموعة الأعداد الحقيقية هي متتالية متقاربة ، وأيضاً كل متتالية متقاربة هي متتالية كوشي في $\mathbb{R}$.

* من الخاصية الخامسة : ليست كل متتالية كوشي هي متتالية متقاربة .

دراسة أمثلة :

لتكن لدينا المتتالية $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$

حيث أن : $a_1 = 1 \ , \ a_2 = 1 + \frac{1}{2} \ , \ a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$\cdots , a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

1) إذن نقدم المتتالية هي متتالية متزايدة لأن :

$$a_{n+1} - a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} > 0$$

إذاً $a_{n+1} - a_n > 0 \Leftarrow a_{n+1} > a_n$

إذاً المتتالية متزايدة .

2) إثبات أن : $a_{2n} - a_n \geq \frac{1}{2} \ ; \ n \in N$

$$a_{2n} - a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow a_{2n} - a_n = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

إذاً: $a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$

$$\Rightarrow a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{2n} - a_n \geq \frac{1}{2}}$$

3) لاحظ لو أخذنا $\varepsilon = \frac{1}{2}$ عندئذٍ سيكون من أجل أي عدد طبيعي N، ونضع $n = 2N$ و $m = n$
فسيكون: $a_n - a_m = a_{2N} - a_N$
وأثبتنا في الخطوة (2) أنّ: $a_{2N} - a_N \geq \frac{1}{2}$
وبالتالي $a_n - a_m \geq \varepsilon = \frac{1}{2}$ وذلك يخالف شرط كوشي حيث يجب أن تكون $a_n - a < \varepsilon$.

4) المتتالية تسعى نحو $+\infty$ لأنّ المتتالية ليست متتالية كوشي وبالتالي ليست محدودة من الأعلى، وبما أنها متزايدة تماماً فهي تسعى إلى $+\infty$.

مثال (2): برهن أن المتتالية التي حدها العام $x_n = \frac{n-1}{n}$ تتقارب من الواحد.

الحل: ليكن $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي موجب ولنطبق شرط كوشي للتقارب، فنجد:

$$|x_n - a| = \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \left|\frac{n-1-n}{n}\right| = \left|\frac{-1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

إذا كان $\frac{1}{m} < \varepsilon$ أو $m > \frac{1}{\varepsilon}$ فسوف نجد:

$$\forall m \le n \Rightarrow |x_n - 1| = \frac{1}{n} \le \frac{1}{m} = \varepsilon$$

وبالتالي شرط كوشي محقق فالمتتالية متقاربة من الواحد ونهايتها عندما n تسعى إلى اللانهاية تساوي الواحد.

سؤال! إذا كانت المتتالية غير متقاربة!

ماذا ستكون؟ ... ستكون متباعدة ...

* تعريف (التباعد لمتتالية عددية):

نقول عن متتالية (a_n) أنها متباعدة إذا وافقت إحدى الحالات التالية:

1) للمتتالية المفروضة في $\mathbb{R}$ أكثر من نهاية.

وهنا نقول أن المتتالية متباعدة بشكل غير مؤكد.

2) إذا كان من أجل أي عدد حقيقي موجب x (أو سالب) يوجد عدد طبيعي N بحيث من أجل كل $n > N$ سيكون $x < a_n$ (أو $x > a_n$)، ونقول في هذه الحالة أن المتتالية (a_n) متباعدة نحو $+\infty$ (أو $-\infty$) أو ليس لها نهاية في $\mathbb{R}$.

ونقول هنا أن المتتالية متباعدة بشكل مؤكد.

سادساً : المتتالية الجزئية لمتتالية أصل :

نقول عن المتتالية (a_{n_k}) أنها متتالية جزئية من المتتالية (a_n) إذا كانت عناصر المتتالية (a_{n_k}) تتشكل من عناصر (a_n) .

مثلاً : المتتالية $(a_{n_k}) = (2n)$ هي متتالية جزئية من المتتالية الأصل : $(a_n) = (n)$.

$*(a_n) = (n) : \quad 1 , \underline{2} , 3 , \underline{4} , 5 , \underline{6} , 7 , \underline{8} , 9 , \underline{10} , \ldots n$

$*(a_{n_k}) = (2n) : \quad \underline{2} , \underline{4} , \underline{6} , \underline{8} , \underline{10} , \ldots$

كل حد من حدود المتتالية الجزئية $(a_{n_k}) = (2n)$ هو حد من حدود متتالية الأصل $(a_n) = (n)$.

مثال آخر : $1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \frac{1}{4} , \ldots , \frac{1}{n} , \ldots$ ← متتالية أصل

$$\left\{\begin{array}{l} 1 , \frac{1}{3} , \frac{1}{5} , \frac{1}{7} , \ldots , \frac{1}{2k-1} , \ldots \\ \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{6} , \frac{1}{8} , \frac{1}{10} , \ldots , \frac{1}{2k} \\ 1 , \frac{1}{4} , \frac{1}{9} , \frac{1}{16} , \frac{1}{25} , \frac{1}{36} , \ldots , \frac{1}{2^k} \end{array}\right.$$

متتاليات جزئية من متتالية الأصل

خاصية (1) : إذا كانت المتتالية (a_n) متقاربة من العدد a ، فإن المتتالية الجزئية (a_{n_k}) من متتالية الأصل (a_n) تكون أيضاً متقاربة من a .

فمثلاً : $(y_n) = \left(\frac{1}{2n}\right)$ ، $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$

نلاحظ أن (y_n) جزئية من (x_n) فهي متقاربة لأن (x_n) متقاربة .

خاصية (2) : إذا احتوت المتتالية (a_n) على ←

على متتالية جزئية (a_{nk}) ، وكانت هذه المتتالية الجزئية متقاربة ، عندها ليس بالضرورة أن تكون متتالية الأصل متقاربة .

سابعاً : مبرهنة بولزانو - فايرشتراس :

تنص هذه المبرهنة على :
إن كل متتالية عددية محدودة تملك متتالية جزئية متقاربة على الأقل.
ملاحظة : ليس بالضرورة أن تكون متتالية الأصل هي متتالية متقاربة .
ندرس مثال :
لو أخذنا المتتالية العددية $(-1)^n$ وهي متتالية محدودة حيث $a_n \in \{-1, +1\}$ ، وهي متتالية ليست متقاربة ... يمكن أن نستخرج من متتالية الأصل هذه متتاليتين جزئيتين متقاربتين ، (a_n) و (b_n) .
حيث : $(b_n) = (-1)^{2n-1}$ ، $(a_n) = (-1)^{2n}$
نلاحظ أن المتتالية (a_n) متقاربة من الواحد .
و المتتالية (b_n) متقاربة من الناقص واحد .

ثامناً : النهاية العليا و النهاية الدنيا لمتتالية :

* النهاية العليا لمتتالية محدودة $\{a_n\}$ و نرمز لها بالرمز ←

أو بالرمز: $\limsup_{n\to\infty} a_n$ ... $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$

وهي الحد الأعلى للمجموعة المكونة من جميع النهايات للمتتاليات الجزئية منها:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim [\sup\{a_k ; k \geq m\}]$$

متتالية $\{V_m\}$ متناقصة.

---

* النهاية الدنيا لمتتالية محدودة $\{a_n\}$ ويرمز لها بالرمز: $\lim_{n\to\infty} a_n$ أو بالرمز: $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

وهي الحد الأدنى للمجموعة المكونة من جميع النهايات للمتتاليات الجزئية منها.

---

* تكون المتتالية المحدودة متقاربة إذا و فقط إذا كان: $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$.

تاسعاً: المتتاليتين المتكافئتين:

ليكن لدينا المتتاليتين $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$، نقول أن هاتين المتتاليتين متكافئتين إذا كان ما يلي محققاً:

$$\boxed{b_n = (1+\varepsilon_n)\cdot a_n \;;\forall n \in \mathbb{N}}$$

حيث أن ε_n هي متتالية تسعى إلى الصفر.

* نرمز للمتتاليتين المتكافئتين بالرمز $(a_n) \sim (b_n)$

* $(a_n) \sim (b_n) \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

حيث: $b_n \neq 0 \quad , \quad \forall n \in N$

* أمثلة عن متتاليتين متكافئتين:

مثال ١- $\frac{n+1}{n^2+5n+7} \sim \frac{1}{n}$

مثال ٢- $\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$

مثال ٣- $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$ «علاقة ستيرلينغ»

نختم هذه المحاضرة بالملاحظة الهامة:

إذا كانت $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ متتاليتين عدديتين متقاربتين من العدد a، وكانت المتتالية $\{c_n\}$ تحقق:

$a_n \leq c_n \leq b_n \; ; \; \forall n \in N$

عندها سيكون $\lim_{n \to \infty} c_n = a$

أي أن المتتالية $\{c_n\}$ متقاربة من a ..

انتهت المحاضرة الأولى

إعداد: دانيا مخصوص - وهب الحسن

تُطلب من مكتبة ميار الهندسية — أرضي: ٠٣١٢١١٨١١٩

حمص – نفق جامعة البعث — جوال: ٠٩٤٤٨٠٨٢٤٩